Fiche révision mécanique I

- Lois de la mécanique classique

- Référentiel : axe ⊕ horloge
- Repères : réf ⊕ vecteurs ⊕ coordonnées

- Référentiel Galiléen : point isolé à $\vec{v} = \vec{cste}$

- Principe fondamental de la dynamique

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- Théorème moment cinétique

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}} \qquad \boxed{\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}}$$

↳ Forces centrales : $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow d\vec{L}/dt = \vec{0}$

↳ mvmt plan $\perp \vec{L}$
↳ $r^2\dot{\theta} = cste = 2\,dA/dt$. Loi des aires

- Energie :

$\cdot\ \vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{grad}\,V$ et $\boxed{E_p = V + cste}$

• force conservative : $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, V$ => $\delta W_{12} = V(1) - V(2)$

↳ $\vec{F} = \vec{F_{nc}} + \vec{F_c}$: décomposi°

↳ $\boxed{E_m = V + E_c = \delta W_{nc}}$

↳ $\boxed{P_{nc} = \vec{F_{nc}} \cdot \vec{v} = dE_m/dt}$

=> Si force non conservatives ne travaillent pas => $E_m = cste$

- changement référentiel :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{(R')} + \overrightarrow{\omega_{R/R'}} \wedge \overrightarrow{A_{(R)}}}$$

- Composition vitesse et accélération :

$$\boxed{\underbrace{\vec{v}_{(R)}}_{\text{absolue}} = \vec{v}_{R'/R} + \underbrace{\vec{v}_{(R')}}_{\text{locale}} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_{R/R'}} \wedge \vec{r}_{(R')}}_{\text{rotations axes}}}$$

$$\boxed{\vec{a}_{(R)} = \vec{a}_{R'/R} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{(R')})}_{\text{axifuge}} + \underbrace{(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{(R')})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{(R)}}_{\text{Euler}}}$$

=> $m \cdot \vec{a}_{R'} = \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{axi} + \vec{f}_{cor} + \vec{f}_{eul}$

↳ $\vec{f}_{axi} = m\omega^2 \vec{r}_\perp = -\overrightarrow{grad}(V_{axi}) = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2} m\omega^2 r^2\right)$

↳ $\boxed{\vec{f}_{cor} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$

↳ $\vec{f}_{cor} \cdot \vec{dl} = 0$: ne travaille pas

Fiche révision Mecanique II

↳ $\boxed{\vec{f}_{eul} = -m\dot{\omega} \wedge \vec{r}}$

* Systemes multiples:

    - Actions reciproques: $\overrightarrow{f_{1\to 2}} = -\overrightarrow{f_{2\to 1}}$

    - PFD: $\boxed{M \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}}$

    ↳ coordonnées % cdm $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$

    - Moment angulaire: Theoreme moment cinetique:

    $$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m}_{ext}}$$

    avec $\boxed{\vec{L} = M\vec{R} \wedge \vec{v}_G + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i'}_{\vec{L}^*}}$ $\vec{L}^*$: mvmt autour G

    $\boxed{\vec{m}_{ext} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}}$

    - Theoreme energie: $Em = Ec + Ep = cste$ (si conservatiV)

    ↳ $\boxed{Ec = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^{\,2} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^{\,2}}_{Ec^*}}$

    ↳ $\boxed{Ep = \sum_i V_{iext} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j V_{ij}}_{\text{pot de paires}}}$

⚠ Ne pas oublier le theoreme moment cinetique

↳ point materiel $\vec{L}^* = \vec{0}$; $Ec^* = 0$

* Solide en rotation autour axe fixe : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

- $\boxed{\vec{L}^* \vec{e_z} = J_\Delta \omega} = \int r_\perp^2 \, dm \, \omega$

- $\boxed{E_c^* = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$

↳ Pour syst isolé $\vec{L}^* = \vec{cste}$ => $J_\Delta \searrow \Leftrightarrow \omega \nearrow$

* Limites mécanique classique

- $v \ll c$: relat restreinte
- $d \ll GM/c^2$: relat generale
- $d \gg h/p$: meca Q
- $\Delta \ell \gg \sqrt{Gh/c^3}$
- $\Delta t \gg \sqrt{Gh/c^5}$

$\left.\right\}$ Gravita° quantique relativiste

- Gravitation :

- 4 interactions fondamentales
  - Gravitation
  - Electromagnetisme (photon)

  } portée infinie
  - Electroforte (gluons)
  - Electrofaible (bosons)

  } portee finie

- Force gravitationelle

  - $\vec{F} = m\vec{g}$ => $\vec{rot}(\vec{g}) = \vec{0}$ => $\vec{g} = -\vec{grad}(\phi)$

  => $div(\vec{g}) = -4\pi G\rho$

⚠ $\vec{g}$ non uniforme => centre gravité ≠ centre de masse

Fiche révision mecanique III

→ $\boxed{\oiint_S \vec{g}\, d^2\vec{S} = -4\pi G M_{int}}$

→ $\boxed{\Delta\phi = 4\pi \rho G}$

Champ de gravitation

- point ou sphere : $\boxed{\vec{g} = -\frac{G M_s}{r^2} \vec{u_r}}$

↳ respecte principe superposition

↳ Solution evidente PFD : orbite circulaire ↱ $\vec{a} = -\frac{V^2}{R} \vec{u_r}$

↳ $r = r_0$; $v = \sqrt{\frac{G M_s}{r_0}}$; $\ell = \sqrt{G M_s r_0}$

↳ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

=> 2^{nd} Loi Keppler : $\boxed{\frac{T^2}{r^2} = \frac{4\pi^2}{G M_s}}$ (ellipti $r \to a$)

- Theoreme Viriel : $\boxed{-V + 2E_c = 0}$

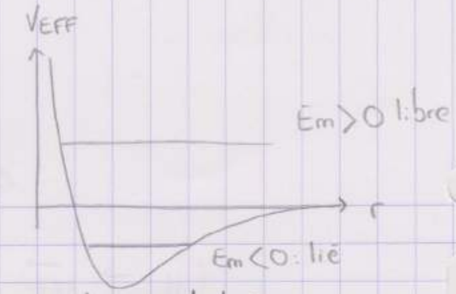
↳ $E_m = \frac{V}{2} < 0$ (circulaire)

⚠ Il existe des potentiel $\neq 1/r$ (cf galaxie)

- Mouvement dans un champ en $1/r^2$

- $\vec{f} = -\frac{G M m}{r^2} \vec{u_r}$

↳ force centrale => $\boxed{\ell = r^2 \dot{\theta} = cste}$

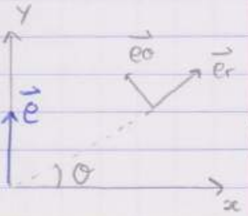


$$\rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \overbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{r}\right)^2 - m \frac{G\Pi}{r}}^{= V_{eff}}$$

↳ Competition entre moment angulaire et gravitation

- Trajectoire

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{G\Pi}{r^2}\vec{u_r} = -\frac{G\Pi}{\ell}\dot{\theta}\,\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v} = \frac{G\Pi}{\ell}(\vec{e_\theta} + \vec{e})$$



↳ proj sur $\vec{e_\theta}$ et $\ell = r^2\dot{\theta} = r.v$ $\Rightarrow$ $\boxed{r = \frac{\ell^2/G\Pi}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$ ($\ell^2/G\Pi = p$)

- $e > 1$: hyperbole $\quad 0 < e < 1$: ellipse
- $e = 1$: parabole $\quad e = 0$: cercle

⚠ Pour cham $\neq 1/r^2$ trajectoires non coniques

↳ $E_m = -\frac{mG\Pi}{2}\left(\frac{1-e^2}{p}\right)$ en accord avec valeurs e

- Dans un problème à 2 corps PFD(1) - PFD(2) ⇝ même chose sur $\vec{r_{12}}$

* Gravitation dans ref labo

$$m\vec{a} = \vec{F_{ext}} + m\overbrace{(\vec{g_{T/m}} - \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{TO}))}^{\vec{g}\text{ : pesanteur}} + \vec{F_{corio}} + \vec{F_{marrées}}$$

↳ $\vec{g}$ definit la vertical d'un lieu.

↳ $T_{sideral}$ = 86 164 sec : 1 tour

↳ $T_{solaire}$ = 86 400 sec : vertical au même endroit

* Chute d'un corps : déviation vers l'Est.

- Chute libre : $\begin{cases} t_a = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v_a = \sqrt{2gh} \end{cases}$ $\Rightarrow x = O\left(\omega c.\, h.\sqrt{\frac{h}{g}}\right)$

Fiche révision mécanique IV

* Satellisation : Satellite noté P

Force marrées : negligeable

$$\frac{d^2 \overrightarrow{TP}}{dt^2} = g^{T/P} + (\cancel{g^{S/P} - g^{S/T}})$$

↳ Orbite circulaire : $\begin{cases} v_c = \sqrt{G M_T / TP} \\ \omega_c = \sqrt{G M_T / TP^3} \end{cases}$

- 1er vitesse libération : $r = R_T \Rightarrow v_{1,L} = 7,9 \ km.s^{-1}$ (orbite rase-motte)
- 2^e " " " : $E = 0 \Rightarrow v_{2,L} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{G M_L}{R_T}} \approx 11,2 \ km.s^{-1}$

⚠ On a necessairement $v_{molecule, atm} < v_{2,L}$ sinon l'atmosphere partirai

Interactions avec un fluide

- Forces de surface d'un fluide

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, p + \eta \Delta \vec{v}$$

- Objet dans un fluide :

$$\overrightarrow{F_{hydro}} = \underbrace{\overrightarrow{F_i}}_{\text{inviscide}} + \underbrace{\overrightarrow{F_\nu}}_{\text{visqueuse}} + \underbrace{\overrightarrow{F_B}}_{\text{Brownien}}$$

↳ $$\vec{F_i} = \rho_f V [\underbrace{-\vec{g} - f_{vol} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{pression surface}} - C_m \underbrace{\left(\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)}_{\text{effet masse red}} + \underbrace{a (\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{rot}\, \vec{v})}_{\text{Conservation } \vec{L}}$$

- Stationnaire irrotationnel, ref galileen $\Rightarrow \vec{F_i} = -\rho_f V \vec{g} = \vec{\Pi}$

⚠ $\vec{\Pi}$ s'applique au centre de poussé pas au cdm

↳ $\vec{F_\nu} = \vec{F_T} + \vec{F_p} + \vec{F_H} = \vec{F_T} + (\vec{F_n} + \vec{F_{aéro}} + \vec{F_{\bar v}}) + \vec{F_H}$

Trainee $/\!/ \Delta\vec{v}$ — Portance $\perp \Delta\vec{v}$ — histoire — Magnus — portance aile — Inhomogeneité effet bords

. Sphère en stationnaire, $Re \lesssim 1$, bords à l'∞, $d \ll L$.

↳ $\vec{F_\nu} = \underbrace{-6\pi\eta r \Delta\vec{v}}_{\text{Trainee}} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{8} Re\right)}_{\text{Corr}^{s}\text{ Oseen}} \underbrace{- \pi R^3 \rho \vec{\Omega} \wedge \Delta\vec{v}}_{\text{Magnus (cf coup franc)}} (1 + o(d/2))$

⚠ Faux si
- ↳ change regime hydro
- ↳ Considere inertie fluide et particules
- ↳ effet de bords (non ∞)
- ↳ particules voisines dans une suspension
- ↳ geometries non spheriques

- Force de portance :

. $\vec{F_n} = \begin{cases} -\pi R^3 \rho \vec{\Omega} \wedge \Delta\vec{v} & \text{si } Re \ll 1 \\ S(|\Delta\vec{v}|)\, \vec{\Omega} \wedge \Delta\vec{v} & \text{si } Re > 800 \quad S<0 \text{ . magnus inverse} \end{cases}$

. $\vec{F_{aéro}} = -\frac{c_z}{2} \rho S |\Delta\vec{v}|^2 \vec{u_y}$

↳ Symetrie a 0 angles $\Rightarrow \vec{F_{aero}} = \vec{0}$

↳ c_z depend geometrie

↳ $\langle \vec{F_B} \rangle = \vec{0}$

↳ $\langle \vec{F_B}(t) \vec{F_B}(t+\tau) \rangle = 2 (6\pi\eta R) k_B T \, \delta(\tau)$ — choc sans correlation $\Rightarrow$ aleatoire

$\Rightarrow$ En pratiQ $\vec{F} = F_T(Re) + \vec{\Pi} + \vec{F_n} + \vec{F_{aero}}$

ballon — avion

Fiche révision mecanique V

Force electromagnetique

. $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

↳ $P = \vec{F}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v}$ => Seul Elec travail

. Distribution charge

$\rho = nq$ $\quad\quad \vec{j} = nq\vec{v}$

↳ $\boxed{\vec{f_{vol}} = \rho\vec{E} + \vec{j}\wedge\vec{B}}$

↳ $\boxed{P_{vol} = \vec{j}.\vec{E}}$

⚠ $\vec{E}$ accellere une particule mais si $\vec{v}$ trp grand => relat

* Modele Tomson atome

↳ e⊖ subit force rappel $\vec{F} = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = -m\omega_0^2\vec{r}$

↳ oscillateur harmoniQ

* Emission spontannée

↳ particule chargée avec $\vec{v} \neq$ cste rayonne de l'energie

↳ modelisable par frottements fluides

$\boxed{\vec{F_{ray}} = -m\dfrac{\vec{v}}{\tau}}$ => $z'(t) = e^{-t/2\tau}\cos(\omega t)$

$\simeq e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t)$

* Rayonnement incident sinusoidal

$\vec{E}_{ext} = \vec{E_0} \sin(\omega t)$

↳ Solution transitoire ⊕ permanente

↳ $\underline{z} = \underline{z_0}\, e^{j(\omega t + kx)}$

↳ resonance en vitesse à ω_0, $\forall Q$

↳ resonance en position à $\omega < \omega_0$ par $Q \geqslant 1/\sqrt{2}$

Equation : $m \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \dfrac{m}{\tau}\dfrac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = q\vec{E}_0 \sin(\omega t)$